Rewolucja probabilistyczna

Michał Heller

1. Wprowadzenie

Pierwsze dekady XX w. w Europie były świadkiem kilku doniosłych rewolucji naukowych. Do najważniejszych należą: powstanie teorii względności i mechaniki kwantowej oraz przemiany, jakie dokonały się w podstawach matematyki, uwieńczone słynnymi twierdzeniami Gödla. Mniej spektakularną, ale – jak się miało wkrótce okazać – nie mniej daleko sięgającą była rewolucja w podstawach rachunku prawdopodobieństwa.

Probabilistyka odgrywała ważną rolę w fizyce klasycznej, np. w dyskusjach błędów pomiarowych, a wraz z powstaniem termodynamiki i fizyki statycznej stała się jednym z jej podstawowych narzędzi. Powstanie mechaniki kwantowej zmieniło status pojęcia prawdopodobieństwa; nie tracąc swej narzędziowej funkcji, stało się ono jedną z podstawowych kategorii wyjaśniających w fizyce. I to nie tylko w fizyce kwantowej: powstanie termodynamiki nieliniowej i teorii nieliniowych układów dynamicznych ukazało zupełnie nową rolę teorii prawdopodobieństwa na terenie fizyki klasycznej.

W niniejszym artykule dokonamy dość zwięzłego przeglądu tych przemian, które dokonały się w myśleniu o prawdopodobieństwie w XX w., a które złożyły się na to, co nazwaliśmy rewolucją probabilistyczną. Wprawdzie jest to przegląd o charakterze historycznym, ale głównym jego celem nie jest historia sama w sobie[1], lecz raczej niejako przygotowanie materiału do głębszego zrozumienia pewnych filozoficznych aspektów zagadnień związanych z prawdopodobieństwem. Nasz historyczny przegląd w zasadzie kończymy na dziele Kołmogorowa, które dało solidne matematyczne podstawy teorii prawdopodobieństwa. Potem nakreślimy już tylko kilka filozoficznych komentarzy i uwag wybiegających w przyszłość.

---

[1] Obszernym opracowaniem dziejów rachunku prawdopodobieństwa w XX w. jest książka: J. von Plato, *Creating Modern Probability. Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective*, Cambridge University Press, Cambridge 1994. Niniejszy artykuł w dużej mierze opiera się na tym opracowaniu. Odsyłaczy do literatury, których brak w tym artykule, Czytelnik winien szukać w książce von Plato. Warto również się odnieść do książki: M.C. Galavotti, *Philosophical Introduction to Probability*, CSLI Publications, Stanford 2005.

W tytule niniejszego artykułu użyłem słowa „rewolucja". W jakim sensie to, co dokonało się w probabilistyce w XX w., można nazwać rewolucją? Podobne pytanie postawił sobie Ian Hacking, ale w stosunku do wcześniejszego okresu, kiedy to pojęcie prawdopodobieństwa wyłaniało się z rozmaitych praktycznych zabiegów, dopiero przybierając bardziej matematyczną postać[2]. Hacking zauważa, że nie była to rewolucja w Kuhnowskim sensie: z okresami normalnymi i zmianami paradygmatów; cytuje również I.B. Cohena, który sądził, że w wypadku prawdopodobieństwa była to raczej „rewolucja" w zastosowaniach niż rewolucja w nauce. Hacking się z tym nie zgadza. Jego zdaniem nie był to tylko problem zastosowań, ponieważ kształtowały się wówczas tak podstawowe pojęcia, jak pojęcia przypadku i determinizmu, a także idee związane z prawdopodobieństwem, które zakorzeniły się w naszym obecnym sposobie rozumienia świata. Była to więc – zdaniem Hawkinga – rewolucja w potocznym znaczeniu tego słowa, rewolucja bardziej fundamentalna niż te, o których piszą filozofowie nauki. Myślę, że dokonanie Kołmogorowa i to wszystko, co je „otaczało", można jednak nazwać rewolucją w sensie Kuhna. Można również zaryzykować twierdzenie, że była to rewolucja w specyficznym sensie, o ile bowiem przed Kołmogorowem istniało wiele (przynajmniej kilka) paradygmatów, o tyle po jego pracach probabilistyka została zdominowana przez jeden paradygmat. Warto się przyjrzeć nieco dokładniej tym przemianom.

2. Prawdopodobieństwo i astronomia

Przed początkiem XX wieku sytuacja w probabilistyce była, do pewnego stopnia, paradoksalna. Można bowiem utrzymywać, że nie istniała jeszcze wówczas matematyczna teoria prawdopodobieństwa, ale istniały już jej zastosowania. Jak wiadomo, rachunek prawdopodobieństwa narodził się z refleksji nad grami hazardowymi i zachował w sobie coś z tej doraźności. Jego podstawowe pojęcia i metody były opracowywane w związku z konkretnymi zagadnieniami, a odniesienia do innych działów matematyki były raczej znikome. Ważne pole zastosowań rachunku prawdopodobieństwa stanowiła fizyka statystyczna i to właśnie na jej terenie dokonywały się najbardziej teoretycznie znaczące udoskonalenia. Do tego stopnia, że metody probabilistyczne wydawały się bardziej narzędziem w ręku fizyki niż elementami matematycznej teorii.

Około przełomu stuleci zaczęła się dokonywać zmiana pod tym względem: stopniowo ujawniały się związki pomiędzy rachunkiem prawdopodobieństwa a niektórymi zagadnieniami czystej matematyki. Istotnym elementem w tych przemianach było stworzenie przez Borela i Lebesgue'a matematycznej teorii miary. Umożliwiła ona

[2] I. Hacking, *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press, Cambridge 2006, Wstęp do drugiego wydania.

z jednej strony wyrażanie pewnych pojęć probabilistycznych w języku miar różnych zbiorów, a z drugiej strony ujawniała probabilistyczne znaczenie niektórych znanych struktur matematycznych.

Jeden z pierwszych sygnałów tego typu przyszedł z zupełnie nieoczekiwanej strony. Astronomowie używali wówczas do obliczania zaburzeń ruchów planet tzw. ułamków łańcuchowych. Jak wiadomo, każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

gdzie a_i, $i = 0,1,2,...$ są liczbami całkowitymi[3]. Szwedzki astronom, Hugo Gyldén, jeszcze w 1888 r. zauważył pewną prawidłowość: Jeżeli ciąg liczb $(a_0, a_1, a_2,...)$ ułamka łańcuchowego pojawiającego się w rachunkach jest rozbieżny, zwykle oznacza to, że orbita jest niestabilna (pod wpływem perturbacji). Gyldén wysunął hipotezę, że prawdopodobieństwo pojawienia się takiej rozbieżności, a co za tym idzie prawdopodobieństwo zaburzenia orbity danej planety, jest mniejsze od dowolnie wybranej wartości. Nie potrafił on udowodnić tej hipotezy, ale ważną okazała się sama idea głosząca, że mogą istnieć prawdopodobieństwa „zaniedbywalnie małe”. Tę intuicję uściślił Poincaré w pracy o ruchu trzech ciał, w której sformułował twierdzenie nazwane potem rekurencyjnym twierdzeniem Poincarégo; mówi ono, że w zwartej przestrzeni fazowej każda trajektoria wraca dowolnie blisko stanu, przez który już kiedyś przechodziła, ale wyjątki od tego twierdzenia są możliwe, choć „zaniedbywalne”. Poincaré pisze, że mają one „prawdopodobieństwo zero”. Potem, po stworzeniu teorii miary, tego rodzaju wyjątkom przypisze się miarę zero.

Prace Gyldéna pozostały niezauważone aż do r. 1900, kiedy to na ich temat wywiązała się dyskusja pomiędzy dwoma szwedzkimi matematykami; byli nimi: Torsten Brodén i Anders Wiman. Brodén jest prawdopodobnie pierwszym matematykiem, który wprost zauważył związek pomiędzy teorią prawdopodobieństwa a teorią miary Borela, ale Wiman okazał się pierwszym, który teorię miary zastosował praktycznie do określenia prawdopodobieństw sugerowanych w rozważaniach Gyldéna. Prace tych

---

[3] Zwykle przyjmuje się, że $a_0 = 0$; wówczas pozostały ciąg a_i można traktować jako dziesiętne rozwinięcie jakiejś liczby rzeczywistej. Liczby wymierne dają zawsze skończone rozwinięcie, są więc postaci $(a_1, a_2, ... a_n, 0, 0 ...)$.

dwu matematyków, a dzięki nim również prace Gyldéna, istotnie przyczyniły się do rozwoju teorii prawdopodobieństwa.

3. W kierunku teorii miary

Jak wiadomo, słynna lista nierozwiązanych problemów w matematyce, przedstawiona przez Hilberta na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 r., miała ogromny wpływ na późniejszy rozwój matematyki. W jego szóstym problemie znalazł się postulat, „aby ująć aksjomatycznie te wszystkie działy fizyki, w których matematyka odgrywa dominującą rolę". Wśród nich Hilbert wymienił rachunek prawdopodobieństwa i mechanikę statystyczną. Wkrótce ukazało się kilka prac (ich autorami byli m.in. Rudolf Laemmel, Ugo Broggi), które podjęły wyzwanie Hilberta, ale nie dokonały one spodziewanego przełomu.

Gdy Hilbert wysunął swój postulat, istniało już narzędzie, którego należało użyć, aby probabilistyce nadać kształt matematycznej teorii w pełnym tego słowa znaczeniu; istniały już nawet próby wykorzystania tego narzędzia w tym celu. Matematyczna teoria miary – bo o nią chodzi – zaczęła się kształtować pod koniec XIX w., głównie dla potrzeb analizy i teorii całkowania. W 1888 r. Emile Borel zdefiniował miarę jako uogólnienie pojęcia długości odcinka. Miarą odcinka $[a, b]$ jest $b - a$, miarą skończonych lub przeliczalnych, parami rozłącznych zbiorów tego rodzaju odcinków, sumy miar tych odcinków; a miarą dopełnienia zbioru mierzalnego A względem zbioru mierzalnego B jest różnica miar $B - A$. Wkrótce potem H. Lebesgue (1904) rozszerzył definicję Borela i zastosował ją do swojej teorii całkowania, a w roku 1915 M. Fréshet nadał teorii miary abstrakcyjną, znaną współcześnie postać.

Sam Borel, w swojej oryginalnej pracy z 1905 r. na temat miary, zasugerował, że można ją zastosować do rozważania probabilistycznych problemów w mechanice klasycznej, ale pierwszy poważny krok w tym kierunku został dokonany dopiero przez M. Planckarela w 1913 r. Rok potem Felix Hausdorff w swoim dziele *Grundzüge der Mengenlehre*, które wkrótce stało się standardowym podręcznikiem teorii mnogości, zauważył, że unormowana miara ma, z formalnego punktu widzenia, wszelkie cechy prawdopodobieństwa (choć nie podał jeszcze formalnej definicji prawdopodobieństwa jako miary). Potem pojawiło się wiele prac wykorzystujących pojęcie miary do problemów związanych z prawdopodobieństwem, lecz pełny sukces miał przyjść dopiero za dwie dekady.

4. Mechanika statystyczna

Mechanika statystyczna narodziła się około połowy XIX w. z rozważań nad teorią ciepła. Teoria ta wkrótce przybrała dwie postaci: fenomenologiczną (makroskopową), opierającą się na wielkościach bezpośrednio obserwowanych, i statystyczną, odwołującą się do ruchu cząstek, podlegającego prawom mechaniki. Od samego początku na styku tych dwu ujęć pojawiły się poważne problemy. W ujęciu fenomenologicznym procesy cieplne wykazują wyraźną kierunkowość (kierunek czasu), podczas gdy ujęcie statystyczne jest dokładnie symetryczne w czasie. Celem rozwiązania tych problemów, lub przynajmniej ich zrozumienia, należało się odwołać do argumentów związanych z prawdopodobieństwem. Wszak z punktu widzenia podejścia statystycznego wielkości obserwowalne (a więc makroskopowe) nie mogą być niczym innym, jak tylko pewnymi uśrednieniami procesów statystycznych.

Pierwsze zastosowanie prawdopodobieństwa do teorii ciepła pojawiło się w pracach Augusta Kröniga (1856) i Clausiusa (1857). Było to niejako pierwsze przybliżenie, ale Clausius wkrótce wyostrzył swoje metody. Interesujący jest związek pomiędzy wykorzystaniem rachunków probabilistycznych w astronomii i w teorii gazów. Dziewiętnastowieczni astronomowie zakładali, że badane ciało niebieskie ma w danej chwili „położenie prawdziwe", a niedokładność w jego określeniu pochodzi z błędów obserwacyjnych. W tym też duchu wykorzystywali oni rachunek prawdopodobieństwa do dyskusji błędów. Adolf Quetelet i J. Herschel jako pierwsi brali pod uwagę rzeczywiste zaburzenia położenia, a nie tylko błędy obserwacyjne. Ten punkt widzenia przejął Maxwell, gdy w 1860 r. wyprowadzał swoją słynną funkcję rozkładu cząstek. Ruchy cząstek potraktował on jako fizyczny proces po prostu podlegający prawom statystyki. W poglądach Maxwella nastąpiła pod tym względem pewna ewolucja w kierunku swoistego indeterminizmu. Początkowo uważał on, że cząstki gazu poruszają się zgodnie z prawami mechaniki z wyjątkiem momentów zderzeń, kiedy to deterministyczne prawa mechaniki są zastępowane przez prawdopodobieństwo, ale już w 1875 r. pisał, że ruchy cieplne są do tego stopnia nieregularne, że „kierunku i prędkości molekuły w danej chwili nie da się wyrazić jako zależnych od jej położenia w tej chwili"[4]. Mechanika klasyczna wymagałaby więc uzupełnienia odwołującego się w istotny sposób (a nie tylko na skutek naszej niewiedzy) do praw statystyki i prawdopodobieństwa.

Te poglądy w dziedzinie mechaniki statystycznej kierowały Maxwella coraz wyraźniej w stronę indeterministycznego spojrzenia na całą fizykę. Twierdził on, że zasada „te same przyczyny powodują te same skutki" jest doktryną metafizyczną, nie znajdującą potwierdzenia w nauce. Niestabilności procesów mogą bowiem powodować nieciągłości w czasie. Dzieje się to wówczas, gdy małe zaburzenia przyczyny powodują duże zaburzenia w skutkach. Tego rodzaju nieciągłości Maxwell nazywał osobliwościami (*singularities*) i sądził, że w bardziej złożonych zjawiskach osobliwości mogą występować „bardzo gęsto" i wówczas układ staje się nieprzewidywalny. W związku z tym Maxwell utrzymywał, że gdy kiedyś fizyka wniknie w „niewidzialne ruchy" mikroświata, to może się okazać, że jego „powiększony obraz" wcale nie będzie taki

---

[4] J.C. Maxwell, „On the Dynamical Evidence of the Molecular Constitution of Bodies", *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, vol. 2, s. 418–438, cytat ze s. 436.

sam jak świat fizyki Newtona. Dotyczy to także rozwoju fizyki jako nauki: jej przyszły stan nie będzie tylko „powiększonym obrazem" jej stanu w przeszłości.

Inną kluczową postacią w rozwoju mechaniki statystycznej był Ludwig Bolzmann. On sam scharakteryzował różnicę pomiędzy swoim podejściem do zagadnień statystycznych a podejściem Maxwella, zwracając uwagę, że podczas gdy on sam określa prawdopodobieństwo stanu układu fizycznego, odwołując się do średniego okresu czasu, w jakim układ przebywa w tym stanie, to Maxwell woli rozważać nieskończony zbiór układów z wszystkimi możliwymi warunkami początkowymi. Podejście Bolzmanna doprowadziło do sformułowania twierdzenia ergodycznego[5]. Podejście Maxwella było związane z pojęciem tzw. *ensemble'a*. Pojęcie to rodzi się w następującej sytuacji. Badamy jeden, konkretny układ mechaniczny, ale nie znamy dokładnie jego stanu. Rozważamy więc zbiór, *ensemble* właśnie, wszystkich możliwych układów identycznych z badanym układem pod względem znanych nam jego własności. Stopień naszej niewiedzy na temat badanego układu może być określony za pomocą miary na *ensemble'u*.

Metoda *ensemble'a* odegrała ważną rolę w badaniach Gibbsa. Pozostawała ona w zgodzie z filozoficznymi preferencjami tego uczonego. Gibbs był bowiem zwolennikiem epistemologicznej interpretacji prawdopodobieństwa, tzn. poglądu, że konieczność posługiwania się prawdopodobieństwem wynika z naszej niewiedzy na temat badanego układu. Jego zdaniem, prawdopodobieństwo opisuje naszą niewiedzę „jako coś wybranego losowo spośród wielkiej liczby rzeczy, które są opisane w sposób zupełny"[6]. Właśnie w duchu tej filozofii można zinterpretować metodę *ensemble'a*.

Konsekwentnie statystyczna interpretacja drugiej zasady termodynamiki była dziełem Bolzmanna. Początkowo spotkała się ona z licznymi zarzutami. Problemem było – jak wspomniałem wyżej – pogodzenie nieodwracalności procesów cieplnych na poziomie makroskopowym z odwracalnością zjawisk statystycznych na poziomie mikroskopowym. Znana jest polemika pomiędzy Bolzmannem a Zermelo, który makroskopowej nieodwracalności przeciwstawiał rekurencyjne twierdzenie Poincarégo, mówiące – jak wiemy – o tym, że trajektoria układu mechanicznego powraca dowolnie blisko stanu, przez który już kiedyś przechodziła[7]. Zarzut był o tyle niezrozumiały, że już

---

[5] Głosi ono, że jedna trajektoria układu mechanicznego wypełnia całą przestrzeń fazową, co sprawia, iż średnie czasowe, mierzone wzdłuż trajektorii, równają się średnim po przestrzeni fazowej (z dokładnością do zbiorów miary zero). Po dokładne definicje pojęć związanych z ergodycznością można sięgnąć np. do: S.W. Fomin, I.P. Kornfeld, J.G. Sinaj, *Teoria ergodyczna*, PWN, Warszawa 1987, rozdział 1.

[6] J.W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Dover, N. York 1962 (pierwsze wydanie w 1902 r.), s. 17.

[7] Pisałem o tym obszerniej w: „Idea wiecznych powrotów: od Zawirskiego do dziś", w: *Krakowska filozofia przyrody w okresie międzywojennym*, tom 2, red.: M. Heller, J. Mączka, P. Polak, M. Szczerbińska-Polak, OBI-Tarnów 2007, s. 281–303.

sam Poincaré, przedstawiając swoje twierdzenie, zaznaczył, że aczkolwiek twierdzenie obowiązuje z prawdopodobieństwem jeden, wyjątki od niego nie są wykluczone, mimo iż należy im przypisać prawdopodobieństwo zero; dziś powiedzielibyśmy, że zbiór wyjątków jest miary zero. Bolzmann w odpowiedzi jeszcze dobitniej wyjaśnił statystyczny charakter praw termodynamiki. Wszystko wskazuje na to, że Zermelo dał się w końcu przekonać argumentom Bolzmanna. Chociaż nie przyznał tego publicznie, w swojej rozprawie habilitacyjnej z 1899 r. uzasadniał probabilistyczne podstawy dynamiki.

Bolzmann zwracał uwagę na fakt, że dla odpowiednio niewielkiej liczby cząstek gazu statystyczny charakter praw ruchu winien się ujawnić we fluktuacjach wokół wartości średniej. Spostrzeżenie to miało także echa w dyskusji na temat śmierci cieplnej Wszechświata. Idąc za sugestią swojego asystenta Schuetza, Boltzmann wysunął hipotezę, że jeżeli się przyjmie, iż Wszechświat jest odpowiednio wielki, to istnieje skończone prawdopodobieństwo, że chociaż Wszechświat jako całość znajduje się w stanie termodynamicznej równowagi, to jego część obserwowana przez nas jest lokalną fluktuacją, w której procesy termodynamiczne przebiegają w kierunku wzrostu entropii[8].

Antyentropijne procesy, choć statystycznie możliwe, są bardzo mało prawdopodobne. W swojej polemice z Zermelo Bolzmann oszacowywał, że dla jednego centymetra sześciennego gazu czas, po którym gaz znajdzie się ponownie w tym samym stanie (zgodnie z rekurencyjnym twierdzeniem Poincarégo), jest rzędu 10^{19} sec. Czy więc zjawiska fluktuacji są w ogóle obserwowalne? Wkrótce okazało się, że faktycznie były one obserwowane od dość dawna. Teraz stały się wdzięcznym terenem do zastosowań rachunku prawdopodobieństwa.

5. Ruchy Browna

Ruchy Browna po raz pierwszy zaobserwowano w 1827 r. Jakiś czas potem interpretowano je, czysto jakościowo, w duchu kinetycznej teorii gazów, ale pełną teorię ruchów Browna podali dopiero Einstein w 1905 r. i Marian Smoluchowski w 1906 r. Podejście Smoluchowskiego opierało się na analizie zderzeń cząstek zawiesiny z cząstkami płynu. Einstein rozpatrywał zjawisko jako proces losowy w czasie ciągłym. Wprawdzie już Bolzmann sygnalizował możliwość takiego podejścia, ale dopiero Einstein zrealizował je w postaci matematycznego modelu. Było to podejście pionierskie, ponieważ dopiero z końcem lat dwudziestych matematycy zainteresowali się tym zagadnieniem, a teoria procesów losowych w czasie ciągłym nabrała impetu dopiero po fundamentalnej pracy Kołmogorowa. Z punktu widzenia tych późniejszych prac po-

---

[8] Por. mój art.: „Zagadnienia kosmologiczne przed Einsteinem", *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, 37, 2005, 32–40.

dejście Smoluchowskiego do ruchów Browna sprowadzało się do metody procesów Markowa z dyskretnym czasem.

Z procesami losowymi w czasie ciągłym związane były pewne trudności filozoficzne. Powszechnie przyjmowano wówczas częstościową interpretację prawdopodobieństwa. Naturalną rzeczą było więc wyobrażanie sobie procesu losowego jako serii przypadków, działających w dyskretnych (choć może bardzo małych) odcinkach czasu. Przypadek działający przez pewien czas w sposób ciągły był trudny do intuicyjnego uchwycenia. Ponadto procesy odbywające się w czasie ciągłym tradycyjnie były domeną mechaniki, a ta była deterministyczna, a nie probabilistyczna.

Praca Einsteina nad ruchami Browna niewątpliwie zaciążyła na jego późniejszych poglądach na rolę prawdopodobieństwa w fizyce i na zagadnieniu interpretacji mechaniki kwantowej. W artykułach Einsteina są wyraźne ślady tego, że swoje poglądy na probabilistykę kształtował on, opierając się na lekturze Bolzmanna, ale wiedzę w ten sposób zdobytą „przepuścił" potem (jeśli tak można powiedzieć) przez konkretne rachunki, jakie trzeba było wykonać celem wyjaśnienia ruchów Browna, i to ostatecznie one przyczyniły się do skrystalizowania jego poglądów. Warto także nadmienić, że prace Einsteina nad ruchami Browna nie tylko dość szybko zyskały uznanie, ale przyczyniły się także do rozwoju statystyki molekularnej, co w rezultacie usunęło ostatnie opory fizyków przeciwko hipotezie atomizmu.

Słynnego powiedzenia Einsteina o tym, że Bóg nie gra w kości, nie należy rozumieć jako protestu przeciwko stosowaniu metod probabilistycznych w fizyce. Einstein chciał przez to powiedzieć tylko tyle, że rola prawdopodobieństwa w mechanice kwantowej powinna być analogiczna do jego roli w klasycznej mechanice statystycznej, to znaczy, że obecna mechanika kwantowa do przyszłej teorii fundamentalnej powinna mieć się mniej więcej tak jak mechanika statystyczna ma się do zwykłej mechaniki klasycznej. Einsteinowi trudno się było zgodzić z tym, by pojedyncze indywidua fizyczne (cząstki elementarne) zachowywały się probabilistycznie, ale w zasadzie nie miał nic przeciwko stosowaniu metod probabilistycznych do *ensemble'i* fizycznych jednostek.

6. Kołmogorow

Punktem zwrotnym w rozwoju teorii prawdopodobieństwa było opublikowanie w 1933 r. przez Andrieja Kołmogorowa książki pt. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[9]. Dzieło to zdystansowało wiele poprzednich prób zdefiniowania pojęcia prawdopodobieństwa i zaksjomatyzowania jego teorii; stało się także punktem odniesienia praktycznie wszystkich późniejszych liczących się prac dotyczących szerzej rozumianej probabilistyki. Już wcześniej Kołmogorow opublikował kilka prac

[9] Springer, Berlin.

z dziedziny prawdopodobieństwa i w niektórych z nich odwoływał się do teorii miary. Inne jego prace odnosiły się do logiki, analizy funkcjonalnej, dynamiki klasycznej, przepływów turbulentnych. Interesował się także żywo podstawami matematyki. Był zwolennikiem intuicjonizmu i metod konstruktywistycznych i te jego preferencje wyraźnie się ujawniały w jego podejściu do rachunku prawdopodobieństwa.

Problem interpretacji prawdopodobieństwa Kołmogorow rozpatrywał jako stosunek matematycznego pojęcia prawdopodobieństwa do zjawisk i procesów świata fizycznego. Skłaniał się on do częstościowej interpretacji prawdopodobieństwa, a w latach sześćdziesiątych zrobił bardzo zdecydowany krok w tym kierunku. Interesowało go też pytanie: czy losowość jakiegoś zdarzenia implikuje, że zdarzenie to nie podlega żadnym prawom na najgłębszym poziomie, i skłaniał się do opinii, że prawdopodobieństwu można przypisać obiektywne znaczenie bez rozstrzygania kwestii losowego czy nie losowego charakteru poziomu fundamentalnego. Statystyczne zachowanie danego zdarzenia może być bowiem następstwem zespołu specyficznych warunków, od których ono zależy.

Zwykle struktury matematyczne odnoszą się do świata empirii za pośrednictwem teorii lub modeli fizycznych. Rachunek prawdopodobieństwa wydaje się być pod tym względem wyjątkiem. Jego reguły odnosimy bowiem bezpośrednio do procesów fizycznych, np. do rzucania kostką lub monetą. Kołmogorow, z właściwą sobie precyzją, zauważył, że w matematycznej teorii prawdopodobieństwa nigdy jednak nie mamy do czynienia bezpośrednio z rzeczywistością fizyczną, lecz jedynie z jej modelami (schematami), które sami konstruujemy. Można powiedzieć, że matematyk, konstruując taki model, w pewnym sensie przejmuje rolę fizyka.

W mechanice klasycznej rozważa się procesy deterministyczne, tzn. takie, w których stan obecny układu determinuje jego zachowanie w przyszłości. Ale może być tak, że stan układu w chwili obecnej determinuje jedynie rozkład prawdopodobieństwa możliwych stanów w przyszłości. Procesy, w których to ma miejsce, nazywają się procesami stochastycznymi. W procesach tych zdeterminowane są nie kolejne stany, lecz następujące po sobie prawdopodobieństwa stanów.

Kołmogorow podjął wyzwanie Hilberta (jego szósty problem z listy nierozwiązanych problemów matematyki), by zaksjomatyzować rachunek prawdopodobieństwa. Formalizacja teorii prawdopodobieństwa wychwytuje tylko formalne związki wewnątrz logicznej struktury, abstrahując od konkretnych sytuacji, i dlatego ceną, jaką trzeba zapłacić za dobrą formalizację, jest to, że gotowy system formalny, stając się częścią czystej matematyki, dopuszcza więcej niż jedną interpretację (twierdzenie Skolema). Rachunek prawdopodobieństwa, rozumiany intuicyjnie, dotyczy tylko zjawisk przypadkowych. Sformalizowany rachunek prawdopodobieństwa odnosi się do formalnie zdefiniowanych „zdarzeń", które mogą nie mieć nic wspólnego z przypadkowością. Jako przykład takiej sytuacji Kołmogorow wymienia badanie układu cyfr w dziesiętnych rozwinięciach różnych liczb. Takie rozkłady, będąc z góry ustalone (wszak wylicza się je w sposób ścisły), nie są wynikiem działania przypadku, a stosują się do nich aksjomaty rachunku prawdopodobieństwa.

Oczywiście zasadniczym osiągnięciem pracy Kołmogorowa było samo zaksjomatyzowanie teorii prawdopodobieństwa, ale jego praca przyniosła również dwa inne ważne rezultaty: skonstruowanie teorii procesów stochastycznych i teorii prawdopodobieństw warunkowych. Dzieło Kołmogorowa jest więc nie tylko ukoronowaniem i dopełnieniem poprzednich badań (które, niejako w jego cieniu, straciły na aktualności), ale również zapoczątkowaniem łańcucha nowych badań, dla których ustaliło ono obowiązujące standardy. Od czasów Kołmogorowa trudno sobie wyobrazić matematycznie odpowiedzialną koncepcję prawdopodobieństwa, która nie nawiązywałaby do teorii miary. Należy to oczywiście rozumieć we właściwy sposób: w pracach badawczych podejście związane z teorią miary wykorzystywano niemal natychmiast po pracy Kołmogorowa, ale trwałe miejsce w ujęciach podręcznikowych znalazło ono dopiero po II wojnie światowej.

7. Interpretacje – von Mises

Przed dziełem Kołmogorowa dominowała częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa. To zdroworozsądkowe podejście do rangi filozoficznej intepretacji podniósł Richard von Mises. Zawodowo zajmował się on zastosowaniami matematyki i jego interpretacja rachunku prawdopodobieństwa nosi wyraźne cechy praktycznego podejścia. Filozoficznie należał on do ruchu neopozytywistycznego. Jedna z jego książek na temat rachunku prawdopodobieństwa, *Warscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*[10], została opublikowana jako trzeci tom serii *Schriften zur Wissenschaftlichen Weltaufassung*, wydawanej przez Koło Wiedeńskie.

Zgodnie z pozytywistyczną filozofią, von Mises starał się uchwycić ideę prawdopodobieństwa na drodze abstrakcji i idealizacji dobrze określonych, obserwowalnych zjawisk. Zastosował on metodę nieformalnej aksjomatyzacji; swoje aksjomaty nazywał też „warunkami". Jego zdaniem, prawdopodobieństw nie należy „mierzyć", odnosząc się do jakichś abstrakcyjnych możliwości („innych światów"). Każde zdarzenie i każdy ciąg zdarzeń, które są parametryzowane za pomocą „etykiet" (*labels*), tworzą pewną matematyczną przestrzeń i są „nośnikami" prawdopodobieństw.

Teoria prawdopodobieństwa w ujęciu von Misesa odnosi się tylko do zdarzeń powtarzających się dużą liczbę razy. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, to problem uważa się za źle postawiony pod względem probabilistycznym. Również zagadnienia

---

[10] Springer, Vienna 1928.

związane z subiektywnym prawdopodobieństwem von Mises uważał za nienadające się do ilościowego ujęcia, a więc za naukowo nietraktowalne.

W ujęciu von Misesa losowość zdarzeń jest postulowana przez teorię. Tymczasem w prawach mechaniki klasycznej nie ma elementu losowości; nie może więc być ona terenem działania prawdopodobieństwa. Ale powstaje też pytanie, mocno podkreślane przez von Misesa, czy prawa mechaniki klasycznej są w stanie wyjaśnić wszystkie ruchy, występujące w przyrodzie. Autentyczna probabilistyka wymaga zjawisk, dla których nie istnieją żadne „algorytmy". Można wnosić, że przez „algorytm" von Mises rozumiał po prostu brak procedur rachunkowych.

8. Interpretacje – de Finetti

Do ok. 1930 r. subiektywna interpretacja prawdopodobieństwa była całkowicie „w odwrocie". Sytuacja zarówno w fizyce (sukcesy mechaniki statystycznej, powstanie mechaniki kwantowej), jak i w filozofii (neopozytywizm) nie sprzyjała subiektywistycznym interpretacjom. Liczne publikacje Brunona de Finetti przyhamowały ten trend. Odwoływał się on do empirystycznej i operacjonistycznej filozofii. Wedle niego prawdopodobieństwo jest subiektywnym stopniem przekonania kogoś o czymś; jest czymś podobnym do bezpośredniego sprawozdania z doznania zmysłowego. Z chwilą jednak, gdy taki „stopień przekonania" zostanie wyrażony, staje się podobny do zdania protokolarnego i może być badany „niezależnymi metodami". Jego matematyczne wyniki, niezależne od interpretacji, wzmacniały zaufanie do jego interpretacyjnych poglądów.

Subiektywną interpretację prawdopodobieństwa można sprowadzić do następującego zagadnienia: Oto mam przed sobą pewną hipotezę H. Niech jej prawdopodobieństwo *a priori* (ocenione np. na mocy zwykłego przypuszczenia) wynosi $P(H)$. Ale za hipotezą H przemawiają pewne argumenty E. Jak ocenić prawdopodobieństwo *a posteriori* hipotezy H (tzn. po uwiarygodnieniu hipotezy H argumentami E)? De Finetti odwoływał się do znanego twierdzenia Bayesa, który głosi: Prawdopodobieństwo *a posteriori* hipotezy H równa się stosunkowi prawdopodobieństwa argumentów E przy założeniu hipotezy H do prawdopodobieństwa argumentów E bez zakładania hipotezy H razy prawdopodobieństwo *a priori* hipotezy H, czyli[11]:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)}{P(E)} \cdot P(H)$$

[11] Prosty dowód twierdzenia Bayesa por.: W. Janowski, *Elementy rachunku prawdopodobieństwa*, Biblioteczka Nauczycieli Matematyki, PZWS, Warszawa 1963, s. 38.

Thomas Bayes żył w XVIII w., był duchownym metodystycznym i zajmował się rachunkiem prawdopodobieństwa. Subiektywistyczną interpretację prawdopodobieństwa określa się niekiedy mianem interpretacji bayesjańskiej.

Naturalnym „podłożem" dla subiektywistycznych interpretacji rachunku prawdopodobieństwa jest klasyczny determinizm: w przyrodzie działają deterministyczne prawa, a jedynie nasza ich ignorancja zmusza nas do posługiwania się rachunkiem prawdopodobieństwa. Pogląd De Finettiego był bardziej wyrafinowany. Być może, częściowo przyczyniło się do jego sformułowania powstanie mechaniki kwantowej, która już wówczas mocno podważyła wiarę w obowiązywanie deterministycznych praw na najgłębszym poziomie przyrody. Coraz bardziej utrwalało się podejrzenie, że poziom ten jest „wewnętrznie indeterministyczny". De Finetti jednak nie mógł się z tym zgodzić: prawdopodobieństwo jest miarą stopnia naszej niewiedzy a nie cechą świata (na jakimkolwiek jego poziomie). Jego rozwiązanie, dość zaskakujące, było wszakże do końca konsekwentne. Prawa przyrody, czy to fizyki klasycznej, czy kwantowej, mają tylko charakter subiektywnych, statystycznych prawidłowości. De Finetti podpierał to przekonanie swoją pozytywistyczną filozofią: z operacjonistycznego punktu widzenia nie ma żadnych powodów, by wierzyć w obiektywne istnienie praw przyrody.

9. Prawdopodobieństwo jako miara

Powiedzieliśmy już wiele o prawdopodobieństwie jako mierze, pora podać – przynajmniej skrótowo – odpowiednie definicje.

Rozważmy przestrzeń X i zbiór S jej podzbiorów: s_1, s_2,... (zakładamy, że zbiór pusty należy do X). O zbiorze S zakładamy, że jest on tzw. σ-polem, tzn. dla każdych dwóch podzbiorów zbioru S, ich suma i różnica także należą do S oraz każda przeliczalna suma podzbiorów przestrzeni S także należy do S. Niech będzie dana funkcja

$$m : S \to \mathbf{R}^+ + \{\infty\},$$

przypisująca każdemu podzbiorowi s_i dodatnią liczbę rzeczywistą $m(s_i)$. Zakładamy ponadto, że (1) $m(\emptyset) = 0$ oraz że (2) dla każdej przeliczalnej rodziny podzbiorów (s_1, ..., s_n, ...) przestrzeni S zachodzi

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} s_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(s_i).$$

Funkcję m nazywamy *miarą* na X, a wartość $m(s_i)$ nazywamy *miarą* podzbioru s_i. Powyższe dwa warunki znaczą, że (1) miara zbioru pustego równa się zeru oraz (2) że miara sumy (przeliczalnej) podzbiorów przestrzeni X równa się sumie (przeliczalnej) miar tych podzbiorów. Trójkę (X, S, m) nazywamy *przestrzenią miary*.

Jeżeli zachodzi warunek $m(X) = 1$, to przestrzeń miary (X, S, m) nazywamy *przestrzenią prawdopodobieństwa* (lub *przestrzenią probabilistyczną*); podzbiory przestrzeni X (czyli elementy przestrzeni S) nazywamy *zdarzeniami*, a wielkość $m(s_i)$ prawdopodobieństwem zdarzenia s_i.

Nie trzeba dodawać, że są to tylko najważniejsze pojęcia, które Kołmogorow rozwinął do pełnej matematycznej teorii. Jego aksjomatyka okazała się tak skuteczna, że zawarła praktycznie wszystkie uprzednio znane formalne ujęcia prawdopodobieństwa jako szczególne przypadki. Jak kilkakrotnie wspomniałem powyżej, praca Kołmogorowa zapoczątkowała gwałtowny rozwój teorii prawdopodobieństwa, zarówno jako teorii czysto matematycznej, jak również jej licznych zastosowań.

10. Probabilistyka a strukturalizm matematyczny

Dzięki pracy Kołmogorowa teoria prawdopodobieństwa stała się pełnoprawną częścią matematyki, więcej – z czasem zaczęła ona odgrywać w niej coraz bardziej znaczącą rolę. We współczesnej matematyce wyróżnia się dwa główne typy struktur: struktury algebraiczne i analityczne; wśród struktur analitycznych wyróżnia się dwie główne podklasy: struktury topologiczne i struktury miary[12]. Struktury probabilistyczne należą oczywiście do struktur miary. Będąc częścią matematyki, rozumianej jako nauka formalna, są one strukturami w takim samym sensie jak wszystkie inne struktury matematyczne[13]. Do świata fizycznego odnoszą się one za pośrednictwem modeli probabilistycznych i dopiero wówczas powstaje problem ich interpretacji. Czy mogą one być interpretowane w duchu strukturalistycznym? Trudności pod tym względem miałyby interpretacje subiektywistyczne, chyba żeby w jakimś (przenośnym?) znaczeniu strukturalistycznie interpretować nasze kategorie poznawcze. Ale obiektywistyczne interpretacje teorii prawdopodobieństwa doskonale mieszczą się w strukturalistycznym schemacie rozumienia fizyki. Mamy bowiem oto pewną strukturę matematyczną, w tym wypadku strukturę probabilistyczną, i „odwzorowujemy" ją na pewne cechy (lub aspekty) świata, dzięki czemu te cechy (lub aspekty) świata zyskują własności strukturalne[14]. Oczywiście nie należy rozumieć ich statycznie (jak np. cech strukturalnych w architekturze), lecz dynamicznie, tzn. w ten sposób, że element zmienności

---

[12] Por. np. P. Roman, *Some Modern Mathematics for Physicists and Other Outsiders*, tom. I, Pergamon Press, New York, Toronto, etc. 1975, s. XXIV–XXV.

[13] O strukturalizmie w filozofii matematyki pisałem obszerniej w: *Filozofia i* Wszechświat, Universitas, Kraków 2006, rozdział 9.

[14] Por. tamże, rozdz. 10.

w czasie zostaje wkomponowany w strukturę, a nawet może odgrywać w niej dominującą rolę. Ale nie jest to niczym wyjątkowym w strukturach występujących w fizyce. Przecież wszystkie teorie dynamiczne pięknie poddają się strukturalistycznemu rozumieniu.

Dla probabilistycznych struktur, pojawiających się w fizyce, charakterystyczne jest co innego, a mianowicie pojawianie się zdarzeń przypadkowych. Jeżeli przypadek rozumieć jako zdarzenie, które występuje, mimo iż przypisuje się mu małą miarę probabilistyczną, to struktury probabilistyczne w fizyce charakteryzują się tym, że wkomponowane jest w nie oddziaływanie zjawisk przypadkowych ze zjawiskami regularnymi.

11. Po Kołmogorowie

Wprawdzie nasz przegląd kończy się na pracy Kołmogorowa, nie znaczy to jednak, że rewolucja probabilistyczna na tej pracy się zakończyła. Końca dobiegł jedynie jej ważny etap – sformułowanie podstaw i włączenie teorii prawdopodobieństwa w główny nurt rozwoju matematyki. Dalsze dzieje probabilistyki biegły różnymi, ale przeplatającymi się, torami. A więc przede wszystkim rozwój samej teorii prawdopodobieństwa jako gałęzi czystej matematyki. Teoria ta, raz włączona w wartki nurt rozwoju matematyki XX w., przejęła na siebie jego dynamizm, ale i sama wzbogaciła go o wiele twórczych wątków. Na przykład oddziaływanie probabilistyki z teorią układów dynamicznych stworzyło teorię procesów stochastycznych i teorię ergodyczności. Gdzieś na styku tych koncepcji narodziła się teoria chaosu dynamicznego, która ukazała niezbędność metod probabilistycznych w najbardziej tradycyjnych działach mechaniki klasycznej. Wspomniane wyżej teorie, mimo swoich nazw wskazujących na zastosowania, rozwijają się także jako działy abstrakcyjnej matematyki i walnie przyczyniły się do tego, że w ostatnich latach XX w. matematyka czysta zaczęła zmieniać swoje oblicze: obszar jej zastosowań coraz mniej przypomina pole „uporządkowanych" obiektów, coraz bardziej stając się „wrzącym oceanem" dynamicznych struktur.

Przemiany te sprawiły, że większość matematyków przestała uważać zastosowania swoich koncepcji za hańbę, lecz – przeciwnie – traktuje je dziś jako rodzaj nobilitacji. Tym bardziej, że najnowsza historia dowiodła, iż zastosowania często wymuszają postęp abstrakcyjnych teorii, i to nierzadko postęp polegający na ukazaniu zupełnie nieoczekiwanych kierunków rozwoju. Wystarczy wspomnieć o termodynamice nieliniowej i teorii powstawania struktur (kompleksyfikacji). To oddziaływanie abstrakcyjnych teorii z zastosowaniami sprawiło, że tytułowe określenie książki Prigogine'a *From Being to Becoming*[15], poświęconej zagadnieniu samoorganizacji, można z powodzeniem odnieść do wspomnianych powyżej przemian zachodzących w polu zainteresowań czystej matematyki.

W pracy o prawdopodobieństwie, choćby miała ona dotyczyć głównie prawdopodobieństwa klasycznego, nie można nie wspomnieć o mechanice kwantowej. W czasach, w których ukazywały się oryginalne prace Kołmogorowa, można jeszcze było uważać, że mechanika kwantowa będzie tylko nowym terenem zastosowań technik probabilistycznych. Wkrótce jednak stało się jasne, że rozsadza ona klasyczne ramy pojęcia prawdopodobieństwa. O ile w elementarnym kursie mechaniki kwantowej student może jeszcze usiłować przeprowadzać rozumowania w kategoriach klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, o tyle już pierwsza próba przeniesienia prawdopodobieństwa jako miary na algebry operatorów (do czego nieuchronnie prowadzi głębsze spojrzenie na kwantowe struktury), pokazuje, że trzeba się tu zmierzyć z zupełnie nowymi wyzwaniami. Nic więc dziwnego, że mówi się już dziś o kwantowej teorii prawdopodobieństwa jako o uogólnieniu klasycznej teorii[16].

Jest regułą w matematyce, że jedno uogólnienie pociąga za sobą następne uogólnienia. Kwantowa teoria prawdopodobieństwa obficie korzysta z metod funkcjonalnych i algebraicznych, nic więc dziwnego, że kolejnym krokiem uogólniającym stało się abstrahowanie od sytuacji związanych z mechaniką kwantową i związanie pojęcia prawdopodobieństwa z pewnym typem algebr, niekoniecznie przemiennych. W ten sposób powstała nieprzemienna teoria prawdopodobieństwa, zwana również wolną (*free*) teorią prawdopodobieństwa[17].

Istnieje jeszcze jeden nurt badań, odrębny od poprzednich, związanych z teorią prawdopodobieństwa – nurt analiz filozoficznych. Obejmuje on takie zagadnienia, jak: natura prawdopodobieństwa i różne jego interpretacje, probabilistyczna epistemologia i związki probabilistyki z logiką indukcji, logiczne aspekty teorii prawdopodobieństwa oraz charakter zastosowań rachunku prawdopodobieństwa do różnych nauk. Tego rodzaju badania odniesione do klasycznej teorii prawdopodobieństwa mają już swoją długą historię i obszerną literaturę[18]. Obecnie coraz częściej prowadzi się je także

---

[15] Freeman and Co., New York 1980.

[16] Por. przeglądowy art.: M. Rédei, S.J. Summers, „Quantum Probability Theory", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 38, 2007, 390–417.

[17] Por. np.: D.V. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica, *Free Random Variables*, American Mathematical Society, Providence 1992; I. Cuculescu, A.G. Oprea, *Noncommutative Probability*, Kluver, Dordrecht–Boston–London 1994.

[18] Por.: M.C. Golavotti, *Philosophical Introduction to Probability*, CSLI Publications, Stanford 2005; D. Gilles, *Philosophical Theories of Probability*, Routledge, London–New York 2008; W. Załuski, *Skłonnościowa interpretacja prawdopodobieństwa*, OBI – Kraków, Biblos – Tarnów 2008. Pewne zagadnienia dotyczące filozofii prawdopodobieństwa poruszyłem w artykule: „Filozofia przypadku", w: *Prace Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych Polskiej Akademii Nauk*, Kraków (w druku).

w odniesieniu do prawdopodobieństwa kwantowego[19]. Nieprzemienna teoria prawdopodobieństwa do tradycyjnych pytań filozoficznych dodaje nowe, np. jak rozumieć prawdopodobieństwo w przestrzeniach silnie nielokalnych, w których nie istnieją indywidua? Problematyka ta szybko dojrzewa do odważnych analiz filozoficznych.

[19] Por. cały numer 38 *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 2007.